L 族内的分布函数的絕对連續性*

許 宝 騄

（数学力学系概率論教研室）

屬於 L 族的分佈函数的理論見於参考文献[1]第 6 章，§§ 29, 30. 这里，我們只把下面要用到的結果敍述出来.

分佈函数 $F(x)$ 屬於族 L 的充要条件是：它的特征函数 $f(t)$ 能表成

$$\ln f(t)=i\gamma t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\int_{-\infty}^{-0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u)+$$
$$+\int_{+0}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u), \tag{1}$$

其中 $M(u)$ 及 $N(u)$ 适合下列条件：

(i) $M(u)$ 是 $(-\infty, 0)$ 上的不減函数，$N(u)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的不減函数；

(ii) $M(-\infty)=0$, $N(+\infty)=0$;

(iii) $\int_{-\infty}^{-0}\frac{u^2}{1+u^2}dM(u)<+\infty$, $\int_{+0}^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^2}dN(u)<+\infty$;

(iv) 若置

$$T(v)=-M(-e^v),\ S(v)=N(e^v),\ (-\infty<v<+\infty), \tag{2}$$

則当 $a<b$, $h>0$ 时，

$$T(a+h)-T(a)\geqslant T(b+h)-T(a),$$
$$S(a+h)-S(a)\geqslant S(b+h)-S(a).$$

在[1]的第 167 頁上証明，$-S(v)$ 是連續而凸的.（原文是說 $S(v)$ 是凸的. 这不过是称謂上的分歧. 这里說 $-S(v)$ 是凸的，是因为在下文征引文献[2]时較为方便.）根据文献[2]（頁 69，定理 4·141），$-S(v)$ 可以表成

$$-S(v)=-S(\alpha)-\int_{\alpha}^{v}\psi(t)dt, \tag{3}$$

其中 $\psi(v)$ 是不增函数. 又因 $S(v)$ 是不減的，故 $\psi(v)\geqslant 0$. 由 (ii) 可見 $S(+\infty)=0$. 於是，在(3)內令 $v\to+\infty$，得

$$0=S(\alpha)+\int_{\alpha}^{+\infty}\psi(t)dt. \tag{4}$$

將(3)与(4)相加，得

* 1958 年 1 月 24 日收到.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$S(v)=-\int_{v}^{+\infty}\psi(t)dt. \tag{5}$$

由(2)及(5)得

$$N(u)=S(\ln u)=-\int_{\ln u}^{+\infty}\psi(t)\,dt=-\int_{u}^{+\infty}\frac{n(v)}{v}dv,\ (u>0) \tag{6}$$

其中 $n(u)=\psi(\ln u)$, 因而 $n(u)$ 是 $(0,\infty)$ 上的不增不負函数.

同样地,我們推导出

$$M(u)=\int_{-\infty}^{u}\frac{m(v)}{v}dv,\ (u>0) \tag{7}$$

其中 $m(u)$ 是 $(-\infty,0)$ 上的不減不負函数. 由(6),(7),(iii),我們还得到

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{um(u)}{1+u^2}du<+\infty,\ \int_{0}^{+\infty}\frac{un(u)}{1+u^2}du<\infty. \tag{8}$$

以(7),(6)代入(1),得

$$\ln f(t)=i\gamma t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{m(u)}{u}du+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{n(u)}{u}du \tag{9}$$

这样, 我們推导出 L 族內分佈函数的特征函数 $f(t)$ 的模范表示法(9), 其中 $m(u)$ 是 $(-\infty,0)$上的不減不負函数, $n(u)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的不增不負函数, 它倆滿足着条件(8).

其次,我們要証明,凡屬於族 L 的分佈函数 $F(x)$ 都是絕对連續的. 为此, 显然只要考慮

$$\ln f(t)=\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{m(u)}{u}du+\int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{n(u)}{u}du \tag{10}$$

的情况就行了. 分兩款进行.

(I) $m(-0)+n(+0)=+\infty$. 由(9)我們有

$$\ln|f(t)|=-\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos tu}{u}\phi_1(u)du,$$

其中

$$\phi_1(u)=m(-u)+n(u), \tag{11}$$

因而 $\phi_1(+0)=+\infty$. 取一正数 a 使 $\phi_1(a)\geqslant 2$. 因为 $\phi_1(u)$ 是不減不負的,所以

$$\ln|f(t)|\leqslant-\int_{0}^{a}\frac{1-\cos tu}{u}\phi_1(u)du\leqslant-2\int_{0}^{a}\frac{1-\cos tu}{u}du=-2\int_{0}^{a|t|}\frac{1-\cos u}{u}du.$$

故当 $|t|>\frac{1}{a}$时,

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\ln|f(t)|\leqslant -2\int_1^{a|t|}\frac{1-\cos u}{u}du=-2\ln a|t|+2\int_1^{a|t|}\frac{\cos u}{u}du.$$

用第二中值定理,得

$$\int_1^{a|t|}\frac{\cos u}{u}du=\int_1^{\xi}\cos u du\leqslant 2.$$

故当 $|t|>\frac{1}{a}$ 时,

$$\ln|f(t)|\leqslant 4-\ln a^2t^2$$

即

$$|f(t)|\leqslant\frac{e^4}{a^2t^2}.$$

可見 $f(t)$ 是可和的,因而 $F(x)$ 是絕对連續的.

(II) $m(-0)+n(+0)<+\infty$. 我們將(9)写为

$$\ln f(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos tu}{u}\phi_1(u)du+i\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin tu}{u}-\frac{t}{1+u^2}\right)\phi_2(u)du, \tag{12}$$

其中 $\phi_1(u)$ 就是(11)而 $\phi_2(u)=n(u)-m(-u)$. 由於 $\phi_1(+0)<+\infty$, $\phi_1(u)$ 是有界的,因而 $|\phi_2(u)|\leqslant\phi_1(u)$ 也有界. 因此,

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\phi_2(u)|}{1+u^2}du<+\infty.$$

旣如此,代替着(12),我們只要考慮

$$\ln f(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos tu}{u}\phi_1(u)du+i\int_0^{+\infty}\frac{\sin tu}{u}\phi_2(u)du \tag{13}$$

就行了.

若 $\phi_1(u)\equiv 0$, 則 $\phi_2(u)\equiv 0$ 而 $F(x)$ 是退化分佈. 这种情形当然排除在外. 因而,我們可以取一个正数 a 使得 $\phi_1(a)=b>0$. 於是

$$\ln|f(t)|\leqslant-\int_0^{a}\frac{1-\cos tu}{u}\phi_1(u)du\leqslant -b\int_0^{a}\frac{1-\cos tu}{u}du.$$

和以前 $b=2$ 时一样,我們終於得到

$$|f(t)|\leqslant\frac{e^{2b}}{a^b|t|^b}, \text{当 } |t|>\frac{1}{a}\text{时}. \tag{14}$$

置

$$g(u)=\int_0^{u}\frac{1-\cos v}{v}dv,\qquad h(u)=\int_0^{u}\frac{\sin v}{v}dv. \tag{15}$$

当 $t\neq 0$ 时,(13)可以写成

$$\ln f(t)=-\int_0^{+\infty}\phi_1(u)dg(|t|u)+i\,\mathrm{sgn}\,t\int_0^{+\infty}\phi_2(u)dh(|t|u).$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

用分部积分法得

$$\ln f(t) = -\phi_1(u)g(|t|u)\Big|_{+0}^{+\infty} + i\,\mathrm{sgn}\,t\,\phi_2(u)h(|t|u)\Big|_{+0}^{+\infty}$$

$$+\int_{+0}^{+\infty} g(|t|u)\,d\phi_1(u) - i\,\mathrm{sgn}\,t\int_{+0}^{+\infty} h(|t|u)\,d\phi_2(u). \tag{16}$$

首二項包含的四个数值都是零． 事实上 $g(+0)=h(+0)=0$ 而 ϕ_1 及 ϕ_2 都有界． 此外 $\lim\limits_{u\to\infty}\phi_2(u)h(|t|u)=0$，因为 h 有界而 $\phi_2(+\infty)=0$．只賸下要証

$$\lim_{u\to+\infty}\phi_1(u)g(|t|u)=0. \tag{17}$$

由 (8) 可以看出，$\int^{+\infty}\frac{\phi_1(u)}{u}du<+\infty$，因而 $\phi_1(u)=o\left(\frac{1}{\ln u}\right)$．由 (15)，显然 $g(u)=O(\ln u)$．这就証明了(17)．因此，(16)成为

$$\ln f(t) = \int_{+0}^{+\infty} g(|t|u)\,d\phi_1(u) - i\,\mathrm{sgn}\,t\int_{+0}^{+\infty} h(|t|u)\,d\phi_2(u).$$

在上式的右端内，在积分号下对 t 求微商 $(t\neq 0)$ 显然是合法的．这样做，就得到

$$f'(t)=\frac{f(t)}{t}\left(\int_{+0}^{+\infty}(1-\cos tu)\,d\phi_1(u) - i\int_{+0}^{+\infty}\sin tu\,d\phi_2(u)\right),$$

因而

$$|f'(t)|\leqslant\frac{A|f(t)|}{|t|},\quad (A\text{ 是常数}) \tag{18}$$

鑒於 (14) 及 (18)，要想完成 $F(x)$ 是絕对連續的証明，只消把下面的引理証了就完了．

引．設 $F(x)$ 为分佈函数，$f(t)$ 为其特征函数．設 $f'(t)$ 在一切 $t\neq 0$ 处存在，而且存在着正数 T,δ,C_1,C_2 使得

$$|f(t)|\leqslant\frac{C_1}{|t|^{\delta}},\quad (|t|>T), \tag{19}$$

$$|f'(t)|\leqslant\frac{C_2|f(t)|}{|t|},\quad (t\neq 0). \tag{20}$$

則 $F(x)$ 是絕对連續的．

証．显然 $F(x)$ 是連續的．据反演公式(見[1]，頁 52)，有

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)\,dt.$$

若 $x\neq 0$，則可用分部积分法：

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi ix}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{it}d(e^{-itx}-1+itx)=$$

$$=\frac{1}{2\pi x}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-itx}-1+itx)\left(\frac{f'(t)}{t}-\frac{f(t)}{t^2}\right)dt.$$

以 $H(x)$ 記右端的积分。於是

$$F(x)-F(0)=\frac{H(x)}{2\pi x}\quad(x\neq 0).\tag{21}$$

容易看出，$H(x)$ 的微商处处存在，而且在积分号下来求是合法的。於是

$$H'(x)=\int_{-\infty}^{\infty}it(1-e^{-itx})\left(\frac{f'(t)}{t}-\frac{f(t)}{t^2}\right)dt,$$

$$|H'(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|1-e^{-itx}|\left(|f'(t)|+\frac{|f(t)|}{|t|}\right)dt.$$

用(19)及(20)，得

$$|H'(x)|\leqslant(C_2+1)\int_{-\infty}^{+\infty}|1-e^{-itx}|\frac{|f(t)|}{|t|}dt$$

$$\leqslant 2(C_2+1)C_1\int_{|t|>T}\frac{dt}{|t|^{1+\delta}}+(C_2+1)|x|\int_{|t|<T}|f(t)|dt$$

$$\leqslant A_1|x|+A_2,$$

其中 A_1, A_2 是常数。可見 $H(x)$ 在每一有限的区間內有有界的微商，因而 $H(x)$ 是絕对連續的。由(21)，可見 $F(x)$ 在每个含 0 的开区間之外是絕对連續的。因 $F(x)$ 在 0 点連續，故它在全 x 軸上絕对連續。証完。

参 考 文 献

[1] 哥涅坚科及廓洛莫格若夫，相互独立随机变数之和的極限分佈，科学出版社．1955．
[2] Zygmund, A., *Trigonomatrical Series*, Warsaw 1935.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net